ЗАКОН ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

А.В. Налимов, Ю.В. Немировский

При решении задач жесткопластических оболочек с целью упрощения, поверхности текучести заменяют приближенными, описываемыми простыми выражениями. Принимая справедливость ассоциированного закона течения для таких приближенных поверхностей, строят системы разрешающих уравнений.

В данной работе показано, что ассоциированный закон течения с необходимостью выполняется для приближенных невогнутых поверхностей.

Пластическое течение тел описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных переменного типа [1]. Решение таких задач удается построить только в частных случаях [1-2].

При некоторых предположениях решения удается построить для класса задач. В частности, для тонких оболочек вращения [3], где, принимая предположение о распределении скоростей деформаций по одной из координат, удается понизить размерность задачи. Это упрощение приводит к увеличению числа переменных, а вместо напряжений в уравнениях фигурируют интегральные характеристики – обобщенные напряжения [3]. Условие пластического течения $\mathbf{f}\left(\sigma,s\right)=0$ из пространства главных напряжений отображается в пространство обобщенных напряжений [4-5]:

$$F(\mathbf{Q},s)=0,$$

где $t_j=\dfrac{1}{2\sigma_0 h}\displaystyle\int_{-h}^{h}\sigma_{jj}d\gamma;$

$$m_j=\frac{1}{\sigma_0 h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{jj}\gamma d\gamma;$$

$$\mathbf{Q}=\left(t_1,t_2,m_1,m_2\right)'=\left(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4\right)';$$

σ_0 – константа размерности напряжений;

$2h$ – толщина оболочки;

γ – координата, отсчитываемая вдоль нормали к срединной поверхности и $\gamma\in\left[-h,h\right]$.

Обобщенные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия [4]:

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{ds}=\bar{\mathbf{\Omega}}\left(\mathbf{Q},N,n_F,s\right)\ s\in\left[s_0,s_1\right], \tag{1}$$

где $\bar{\mathbf{\Omega}}=\left(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3\right)';$

$$\bar{\mathbf{Q}}=\left(t_1,N,m_1\right)';$$

$$\Omega_1=\frac{\sin\xi}{R}\left(t_1-t_2\right)-\frac{N}{R_1}-n_F E_1;$$

$$\Omega_2=\frac{\sin\xi}{R}N+\left(\frac{t_1}{R_1}+\frac{t_2}{R_2}\right)-n_F E_n;$$

$$\Omega_3=\frac{\sin\xi}{R}\left(m_1-m_2\right)+\frac{2}{h}N;$$

$$N=\frac{1}{2\sigma_0 h}\int_{-h}^{h}\sigma_{13}d\gamma;$$

$$\frac{dR}{ds}=-\sin\xi;\ \frac{ds}{d\xi}=R_1;\ \frac{dZ}{ds}=\cos\xi;$$

$$T_0=2\sigma_0 h;$$

s – координата, отсчитываемая вдоль меридиана;

ξ – угол между касательной к образующей и осью вращения Z;

$R_i\ \left(i=1,2\right)$ – главные радиусы кривизны;

$E_1T_0,\ E_nT_0$ – касательная и нормальная нагрузки, приложенные к срединной поверхности оболочки Σ_0;

$R=R_2\cos\xi$ – расстояние от оси вращения Z до поверхности Σ_0;

n_F – коэффициент запаса (индекс F обозначает предельную поверхность, используемую при решении задачи).

Пусть поверхность $F=0$, образованна гиперповерхностями $F_i=0\ \left(i=\overline{1,L}\right)$ [3–5], а обобщенные скорости деформаций $\dot{\mathbf{q}}=\left(\dot q_1,\dot q_2,\dot q_3,\dot q_4\right)'=\left(\dot\varepsilon_{01},\dot\varepsilon_{02},\dot\chi_1,\dot\chi_2\right)'$ и напряжения связаны ассоциированным законом течения [4]:

$$q_j=\lambda_i\frac{\partial F_i\left(\mathbf{Q},s\right)}{\partial Q_j}, \tag{2}$$

где $\lambda_i\geq o$, если F_i=0 и dF_i=0,

$\lambda_i=0$ если F_i<0 или dF_i<0, (3)

$$\sum_{i=1}^{L} \lambda_i = const \geq 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{01} = \frac{d\dot{u}}{ds} + \frac{\dot{w}}{R_1}, \qquad \dot{\chi}_1 = -\frac{h}{2}\frac{d\dot{\vartheta}}{ds},$$

$$\dot{\varepsilon}_{02} = \frac{\left(\dot{w}\cos\xi - \dot{u}\sin\xi\right)}{R}, \dot{\chi}_2 = \frac{h}{2}\frac{\sin\xi}{R}\dot{\vartheta}, \qquad (4)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\dot{w}}{ds} - \frac{\dot{u}}{R_1}.$$

Выражения для гиперповерхностей $F_i = 0$ имеют сложную структуру так, что в замкнутом виде удается записать только часть из них [4]. При выполнении таких гиперповерхностей решение соответствующих систем уравнений удается построить в аналитической форме [6]. При реализации остальных гиперповерхностей обобщенные напряжения и скорости перемещений описываются нелинейными сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений [6]. Решение задач такого типа имеет высокую вычислительную сложность, а применение методов [7-8] затруднено сложностью вычисления правых частей. Поэтому обычно, например [9–10], поверхности текучести $F = 0$ заменяют приближенными, например, кусочно–гладкими поверхностями $\tilde{F} = 0$, описываемыми простыми выражениями. Для таких приближенных поверхностей без доказательства принимается справедливость ассоциированного закона течения. Учитывая эквивалентность ассоциированного закона течения и принципа максимума Мизеса [11], для тонкостенных конструкций принимают справедливость теорем предельного равновесия [12], которые широко используются при решении практических задач [2, 3, 13].

В [14] получены точные решения для тонкостенных конструкций с приближенными и точной поверхностями текучести, противоречащие теоремам предельного равновесия. Это обстоятельство стало причиной детального анализа предположений теории жестко-пластических оболочек.

В работе доказывается, что ассоциированный закон течения выполняется для приближенных невогнутых поверхностей.

ТЕОРЕМА

Пусть невогнутая кусочно-гладкая поверхность $\tilde{F} = 0$ является вписанной по отношению к точной поверхности текучести $F = 0$, а $\Sigma_{\tilde{F}}$ и Σ_F множества статически допустимых полей обобщенных напряжений, ограниченных этими поверхностями.

Тогда для оболочки с невогнутой поверхностью $\tilde{F} = 0$ максимальное значение предельной нагрузки с необходимостью достигается при реализации таких статически допустимых напряжений $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_{\tilde{F}}$, что соответствующее поле скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ является кинематически допустимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство будем проводить на основе теорем предельного равновесия. Пусть предельная нагрузка $n_F\mathbf{P}$ $\left(\mathbf{P} = \{E_1, E_n\}\right)$, определенная на статически допустимом поле напряжений $\mathbf{Q} \in \Sigma_F$ и $n_F = \max\limits_{\mathbf{Q}\in\Sigma_F}\left(n_F^*\right)$.

Рассмотрим подмножество всех статически допустимых полей напряжений $\Sigma_{\tilde{F}} \subset \Sigma_F$, не превосходящих поверхность $\tilde{F} = 0$. Поскольку $\Sigma_{\tilde{F}} \subset \Sigma_F$, то в соответствии со статической теоремой предельного равновесия имеет место $n_{\tilde{F}}^* \leq n_F$ для любых $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_{\tilde{F}}$.

Для определения максимального значения $n_{\tilde{F}}^*$ проведем следующие построения.

Обратим $\tilde{F}(\mathbf{Q}, s) = 0$, относительно m_2:

$$m_2 = \bar{F}(t_1, t_2, m_1, s). \qquad (5)$$

Кусочно-гладкие поверхности $\tilde{F} = 0$, образованные гиперповерхностями $\tilde{F}_j = 0$ $\left(j = 1, \bar{L}\right)$, представим в виде:

$$\tilde{F} = \tilde{\lambda}_j \tilde{F}_j, \qquad (6)$$

где $\tilde{\lambda}_j \tilde{F}_j = 0$, $\sum_{i=1}^{\tilde{L}} \tilde{\lambda}_j = const \geq 0$. (7)

С учетом (6-7) равенство (5) можно записать следующим образом:

$$m_2 = \bar{\lambda}_j \bar{F}_j(t_1, t_2, m_1, s), \qquad (8)$$

где $\tilde{\lambda}_j\left(m_2 - \bar{F}_j\right) = 0;\ \bar{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j / \tilde{\lambda}_k;\ \sum_{k=1}^{\tilde{L}} \bar{\lambda}_k = 1.$

Подставим (8) в (1) получим систему трех дифференциальных уравнений с неизвестным коэффициентом $n_{\tilde{F}}^*$ и функцией $t_2(s)$.

Теперь утверждение статической теоремы предельного равновесия можно сформулировать следующим образом:

Для любой допустимой функции $t_2(s) \in \Sigma_{\tilde{F}}$ соответствующее значение коэффициента запаса $n^*_{\tilde F}$ не превосходит истинное значение и $n^*_{\tilde F} \le n_{\tilde F} \le n_F$ [12].

Задачу определения функции $t_2(s)$, обеспечивающей достижения максимального значения $n^*_{\tilde F}$, можно сформулировать в терминах теории оптимального управления:

Найти такое кусочно-непрерывное управление $\mu(s) = \left(t_2, n_{\tilde F}\right)'$, $s \in [s_0, s_1]$, чтобы объект, описываемый уравнениями (10), двигаясь из многообразия $\Delta_0 = \left\{\mathbf{z} \in E^4, \mathbf{A}_0\mathbf{z}(s_0) = \mathbf{B}_0\right\}$, перешел на многообразие $\Delta_1 = \left\{\mathbf{z} \in E^4, \mathbf{A}_1\mathbf{z}(s_1) = \mathbf{B}_1\right\}$ так, чтобы функционал (9) принимал наименьшее значение [15].

$$\mathbf{\Phi}_* = \inf_{\mu} \mathbf{\Phi}(\mu, \mathbf{z}); \qquad (9)$$

$$\mathbf{\Phi}(\mu, \mathbf{z}) = \int_{s_o}^{s_1} \Omega_0(\mathbf{z}, \mu)\, ds,\ \Omega_0(\mathbf{z}, \mu) = \frac{\mu_2}{(s_0 - s_1)},$$

при условиях:

$$\frac{d\mathbf{z}}{ds} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{z}, \mu);\ \mathbf{A}_i \mathbf{z}(s_i) = \mathbf{B}_i\ \ (i = 0,1), \qquad (10)$$

где $\mathbf{z} = \left(t_1, N, m_1, s\right)'$;

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{z}, \mu) = \left(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4\right)';\ \Omega_4(\mathbf{z}, \mu) = 1.$$

Условия $\mathbf{A}_i\mathbf{z}(s_i) = \mathbf{B}_i$, $(i = 0,1)$ есть суть статические краевые условия [3], которые в случае задачи (9)–(10) нужно дополнить еще одним условием. В качестве такого условия можно использовать равенства, например, $z_4(s_0) = s_0$ или $z_4(s_1) = s_1$.

При наибольшем значении коэффициента запаса $n_{\tilde F} = \mu_2$ функционал (9) принимает наименьшее значение, что обеспечивается его строением.

Для определения необходимых условий достижения минимума функционала (9) при ограничениях (10) воспользуемся принципом максимума Л.С.Понтрягина [15], который для рассматриваемой задачи формулируется следующим образом:

Пусть $\left\{\mu(\circ), \mathbf{z}(\circ)\right\}$, $s \in [s_0, s_1]$ решение задачи (9), (10). Тогда с необходимостью существует вектор функция $\boldsymbol{\psi}(s) = \left(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\right)'$, где $\psi_0 = const$, такая, что:

1. $\psi_0 \le 0$; $\left(\boldsymbol{\psi}(s) \ne 0\right)$ $s \in [s_0, s_1]$.

2. $\boldsymbol{\psi}(s)$ является решением следующей сопряженной системы уравнений, соответствующей рассматриваемому решению $\left\{\mu(\circ), \mathbf{z}(\circ)\right\}$, $s \in [s_0, s_1]$:

$$\frac{d\psi_i}{ds} = -\left(\boldsymbol{\psi}, \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial z_i}\right), \left(i = \overline{0,4}\right), \qquad (11)$$

где $\dfrac{dz_0}{ds} = \Omega_0(\mathbf{z}, \mu)$.

3. При любом $s \in [s_0, s_1]$ гамильтониан

$$\mathrm{G}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}, \mu) = \left(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{\Omega}(\mathbf{z}, \mu)\right)$$

переменного μ достигает в точке $\mu(\circ)$ максимальное значение и

$$\max_{\mu} \mathrm{G}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}, \mu) = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{z}) = C = const. \qquad (12)$$

4. На краях $s = s_i$, $(i = 0,1)$ выполняются условия трансверсальности [15], т.е. вектора $\boldsymbol{\psi}(s_i)$ направлены по нормали к касательным плоскостям к многообразиям Δ_i, $(i = 0,1)$. Формально условия трансверсальности записываются следующим образом [15]:

Для любого вектора $\mathbf{z}(s_i) \in E^4, (i = 0,1)$ такого, что: $a^{(i)}_{\alpha,\beta} \cdot z_\alpha(s_i) = 0\ \left(\alpha, \beta = \overline{1,4}\right)$, имеет место:

$$\psi_k(s_i) z_k(s_i) = 0\ \left(k = \overline{1,4}\right). \qquad (13)$$

Сравнивая уравнения (11) и (2), (4), и учитывая, что условия трансверсальности (13) для жесткопластических оболочек всегда выполняются [16], видно, что величины $\bar{\boldsymbol{\psi}} = \left(\psi_1, \psi_2, \psi_3\right)'$ с точностью до обозначений, совпадают с величинами $\mathbf{u} = \left(\dot u Rh, \dot w Rh, -\dot\vartheta Rh^2/2\right)'$.

Таким образом, с необходимостью коэффициент запаса $n^*_{\tilde F}$ на статически допустимом поле обобщенных напряжений $\mathbf{Q}^* \in \Sigma_{\tilde F}$ достигает максимальное значение при условии, когда величины $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ удовлетворяют кинематическим соотношениям (2), (4) и кинематическим краевым условиям.

Для полного доказательства необходимо еще показать, что скорость диссипации энергии неотрицательная и поверхность $\tilde F = 0$ не имеет участков вогнутости. Эти условия выполняется, если множители $\tilde\lambda_i$ (6) удовлетворяют соотношениям типа (3) [12].

Частично соотношения (3) выполнены, в ходе построения поверхности $\tilde{F}=0$ (7), а остальные можно объединить в равенство:

$$\tilde{\lambda}_j d\tilde{F}_j = 0. \qquad (14)$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим условие (12), обеспечивающее достижение максимального значения $n_{\tilde{F}}$, которое с учетом принятых обозначений записывается в виде:

$$\left(\mathbf{u},\bar{\boldsymbol{\Omega}}\right)+\varphi\left(\mathbf{Q}^{*},N,\mathbf{u},n_{\tilde{F}},s\right)=C, \qquad (15)$$

где $$\frac{d\varphi}{ds}=Rh\tilde{\lambda}_i\frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial s}-\left(\mathbf{u},\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial s}\right). \qquad (16)$$

Интегрируя по частям уравнение (14) с учетом (1), (2), (4) получим соотношения (15)–(16).

Таким образом, для любой вписанной невогнутой поверхности $\tilde{F}=0$ максимальное значение статически допустимый коэффициент запаса $n_{\tilde{F}}=\max\limits_{\mathbf{Q}\in\Sigma_{\tilde{F}}}\left(n_{\tilde{F}}^{*}\right)$ с необходимостью достигает при реализации таких статически допустимых обобщенных напряжений $\mathbf{Q}^{*}\in\Sigma_{\tilde{F}}$, что соответствующие скорости $\dot{\mathbf{q}}$ являются кинематически допустимыми и $n_F \ge n_{\tilde{F}} \ge n_{\tilde{F}}^{*}$. *Что и требовалось доказать*.

Справедливость ассоциированного закона течения можно показать и для описанной невогнутой поверхности $\hat{F}=0$. Для этого рассмотрим оболочку из некоторого фиктивного материала с поверхностью текучести $G=0$ такой, что $\hat{F}=0$ является вписанной по отношению к $G=0$.

Для этих поверхностей определим множества статически допустимых полей обобщенных напряжений $\Sigma_{\tilde{F}}\subset\Sigma_F\subset\Sigma_{\hat{F}}\subset\Sigma_G$. Согласно приведенной теореме получим, что в предельном состоянии в оболочке из жесткопластического материала с любой из перечисленных поверхностей выполняется ассоциированный закон течения, а соответствующие коэффициенты запаса удовлетворяют неравенствам $n_{\tilde{F}}\le n_F\le n_{\hat{F}}\le n_G$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. - М.: Гостехиздат, 1956. - 493 с.
2. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т.1. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 448 с.; Т.2. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 448 с.
3. Ходж Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций / Пер. с англ. - М.: Машгиз, 1963. - 380 с.
4. Немировский Ю.В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметрических оболочек // Известия АН СССР. МТТ. - 1969. - № 6. - С.80–89.
5. Вохмянин И.Т. Условие текучести Мизеса для произвольных тонких пластин и оболочек // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. - 1985. - № 2. - С.29–33.
6. Немировский Ю.В., Налимов А.В. Полные решения задач предельного равновесия армированных осесимметрических оболочек // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. - 2004. - № 1. - С. 4–13.
7. Чанг К., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. - М.: Мир, 1988. - 248 с.
8. Найфэ М. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976. - 454 с.
9. Ивлев Д.Д., Листрова Ю.П., Немировский Ю.В. К теории предельного равновесия слоистых оболочек вращения // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. - 1964. - № 4. - С.77–86.
10. Hodge P.G. Automatic piecewise linearization in ideal plasticity // Computation Meth. in Appl. Eng. 1977. Vol.10, n.3. P.249-272.
11. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. - М.: Наука, 1981. - 208 с.
12. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. - М.: Наука, 1966. - 231 с.
13. Дехтярь А.С., Рассказов А.О. Несущая способность тонкостенных конструкций. - Киев: Будивэльнык, 1990. – 153 с.
14. Налимов А.В. Универсальная аппроксимация поверхностей текучести для жесткопластических цилиндрических оболочек // Ползуновский вестник. - 2006. - № 2-2. - С. 90–94.
15. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1983. - 392 с.
16. Немировский Ю.В., Налимов А.В. Предельное равновесие армированных оболочек нулевой гауссой кривизны // Прикладная механика. - 1989. - Т. 25. - № 9. - С. 72–79.